

به نام او، به یاد او، برای او

**محاسبات علمی**

**نرم های برداری و ماتریسی**

***Dr. Ali Valinejad***

**valinejad.ir**

**valinejad@umz.ac.ir**

**University of Mazandaran**



## فهرست مطالب

- ❖ نرم های برداری
- ❖ نرم های ماتریسی
- ❖ همگرایی دنباله ها
- ❖ ماتریس همگرا
- ❖ همگرایی سری توانی
- ❖ نرم وابسته و معکوس ماتریس
- ❖ نرم وابسته و ماتریس متعامد



# نرم های برداری

University of Mazandaran



# نرم های برداری

## تعریف نرم برداری روی فضای $\mathbb{R}^n$ :

تابع پیوسته  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  را یک **نرم برداری** روی  $\mathbb{R}^n$  نامیم هرگاه در خواص زیر صدق کند:

۱. به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$   $\|x\| \geq 0$  و  $\|x\| = 0$  اگر و فقط اگر  $x=0$ ،

۲. به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  و هر  $\alpha \in \mathbb{R}$ ،  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ،

۳. به ازای هر  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ،  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

## چند نرم برداری روی فضای $\mathbb{R}^n$ :

❖ نرم یک (نرم-۱):  
 $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

❖ نرم ماکزیمم (نرم- $\infty$ ):  
 $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_\infty = \max_{i=1:n} |x_i|$

❖ نرم اقلیدسی (نرم-۲):  
 $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

❖ نرم- $p$  (برای  $1 \leq p$ ):  
 $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

مثال: فرض کنید  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$  در این صورت،

$$\|x\|_1 = |1| + |0| + |-2| = 3$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |0|, |-2|\} = 2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |-2|^2} = \sqrt{5}$$

$$\|x\|_3 = (|1|^3 + |0|^3 + |-2|^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$



# نرم های برداری

تمرین:

۱- ثابت کنید  $\|x\|_1$ ،  $\|x\|_\infty$  و  $\|x\|_2$  نرم های برداری روی فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  هستند.

اثبات نرم برداری بودن تابع  $\|\cdot\|_1$

با توجه به تعریف نرم-۱، برای بردار  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  از  $\mathbb{R}^n$  رابطه  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  برقرار است. لذا:

اثبات برقراری خاصیت اول:

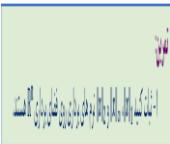
با توجه به نامنفی بودن قدر مطلق یک عدد حقیقی، خاصیت اول بوضوح برقرار است.

اثبات برقراری خاصیت دوم:

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_1 &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \dots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha| |x_1| + |\alpha| |x_2| + \dots + |\alpha| |x_n| \\ &= |\alpha| (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = |\alpha| \|x\|_1\end{aligned}$$

اثبات برقراری خاصیت سوم (نامساوی مثلثی):

$$\begin{aligned}\|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \dots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \dots + |x_n| + |y_n| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$



# نرم های برداری

چند نکته:

$$\| -x \| = |-1| \| x \| = \| x \| \quad -1$$

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \| \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ به ازای هر} \quad -2$$

$$| x^T y | \leq \| x \|_2 \| y \|_2 \quad -3 \text{ نامساوی کوشی شوارتز}$$

$$| x^T y | \leq \| x \|_p \| y \|_q \quad 1 \leq p, q \leq \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad -4 \text{ نامساوی هولدر}$$

**اثبات ۲:** از  $x = x - y + y$  و نامساوی مثلثی داریم

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \| \Rightarrow \| x \| - \| y \| \leq \| x - y \| \quad (*)$$

به طور مشابه از  $y = y - x + x$  داریم

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \| y - x \| + \| x \| \Rightarrow \| y \| - \| x \| \leq \| x - y \| \quad (**)$$

بنابراین از (\*) و (\*\*) نتیجه می شود که:

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$$

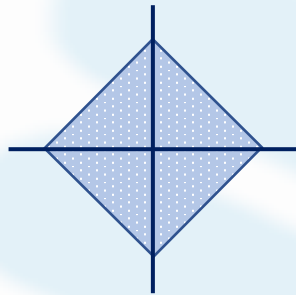


# نرم های برداری

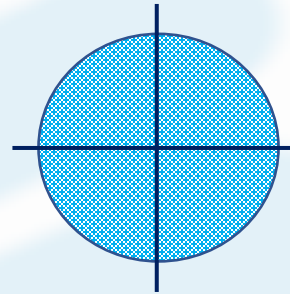
مثال:

$$S = \{x \in R^2: \|x\| \leq 1\}$$

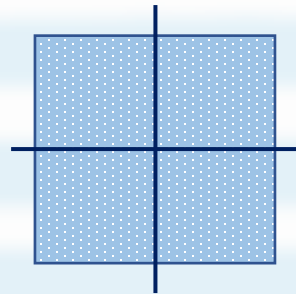
$$\{x \in R^2: \|x\|_1 \leq 1\}$$



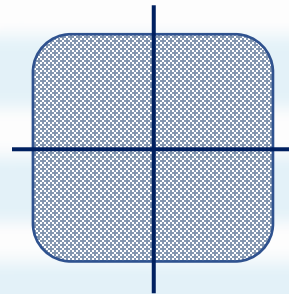
$$\{x \in R^2: \|x\|_2 \leq 1\}$$



$$\{x \in R^2: \|x\|_\infty \leq 1\}$$



$$\{x \in R^2: \|x\|_p \leq 1\}$$



# نرم های برداری

تعریف هم ارزی نرم های برداری (Equivalence of Vector Norms):

دو نرم برداری  $\|\cdot\|_\alpha$  و  $\|\cdot\|_\beta$  را هم ارز گوئیم اگر ثابت های  $a$  و  $b$  حقیقی وجود داشته باشند به طوری که

$$a\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta \leq b\|\cdot\|_\alpha$$

**گزاره:** به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$ ، نرم های  $\|\cdot\|_1$ ،  $\|\cdot\|_2$  و  $\|\cdot\|_\infty$  در روابط هم ارزی زیر صدق می کنند:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad (\text{الف})$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad (\text{ب})$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad (\text{ج})$$



# نرم های برداری

تعریف هم ارزی نرم های برداری (Equivalence of Vector Norms):

دو نرم برداری  $\|\cdot\|_\alpha$  و  $\|\cdot\|_\beta$  را هم ارز گوئیم اگر ثابت های  $a$  و  $b$  حقیقی وجود داشته باشند به طوری که

$$a\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta \leq b\|\cdot\|_\alpha$$

مثال: فرض کنید  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$  در این صورت،

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |0| + |-2| = 3$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |0|, |-2|\} = 2$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |-2|^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \sqrt{5} \leq 3 \leq \sqrt{15}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow 2 \leq 3 \leq 6$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty \Rightarrow 2 \leq \sqrt{5} \leq 2\sqrt{5}$$



# نرم های برداری

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}$$

اثبات نامساوی (ج)

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1$$

(۱)

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}$$

(۲)

اثبات نامساوی ج- (۱)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \quad ?$$

$$\|x\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1$$

اثبات نامساوی ج- (۲)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty} \quad ?$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq n \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = n\|x\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty} \quad \blacksquare$$



# نرم های برداری

تمرین:

۱- روابط هم ارزی نرم های برداری زیر را ثابت کنید:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad (\text{الف})$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad (\text{ب})$$



# نرم های ماتریسی

University of Mazandaran



# نرم های ماتریسی

تعریف نرم ماتریسی روی فضای برداری ماتریس های حقیقی  $m$  در  $n$ ،  $(\mathbb{R}^{m \times n})$ :

تابع پیوسته  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  را یک **نرم ماتریسی** نامیم هرگاه در خواص زیر صدق کند:

۱. به ازای هر  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $\|A\| \geq 0$  و  $\|A\| = 0$  اگر و فقط اگر  $A = \mathbf{0}$ ،

۲. به ازای هر  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  و هر  $\alpha \in \mathbb{R}$ ،  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ ،

۳. به ازای هر  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .



# نرم های ماتریسی

نرم های ماتریسی وابسته به نرم برداری (subordinet matrix norm):

با مفروض بودن یک ماتریس دلخواه  $A$  و نرم های برداری  $\|\cdot\|_m$  و  $\|\cdot\|_n$ ، نرم ماتریسی وابسته به این نرم های برداری به شکل زیر تعریف می شود

$$\|A\|_{m,n} = \sup_{0 \neq x \in R^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}$$

این نرم در هر سه خاصیت نرم ماتریسی صدق می کند.

نکته:

$$\|A\|_{m,n} = \sup_{0 \neq x \in R^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} \Rightarrow \|A\|_{m,n} = \sup_{\|x\|_n=1} \|Ax\|_m$$



# نرم های ماتریسی

نرم های ماتریسی وابسته به نرم برداری (subordinet matrix norm):

در حالت خاص

با مفروض بودن یک ماتریس دلخواه  $A$  و نرم برداری  $\|\cdot\|_p$ ، نرم ماتریسی وابسته به این نرم برداری به شکل زیر تعریف می شود

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

نکته:

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \Rightarrow \|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

$$\Rightarrow \|A\|_p \geq \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p$$



# نرم های ماتریسی

## چند نرم ماتریسی مهم

❖ نرم-۱ (نرم ماکزیمم مجموع ستون ها):

$$\|A\|_1 = \max_{j=1:n} \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right\}$$

❖ نرم- $\infty$  (نرم ماکزیمم مجموع سطرها):

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1:m} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

❖ نرم-۲ (نرم طیفی):

$$\|A\|_2 = \sqrt{A^T A} = \sigma_{\max}(A)$$

❖ نرم فروبینیوس (نرم هیلبرت اشمیت):

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$$

❖ نرم  $L_{2,1}$ :

$$\|A\|_{2,1} = \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$



# نرم های ماتریسی

مثال ۱: فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  در این صورت،

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |-2| + |5|, |-2| + |4| + |6|\} = \max\{9, 12\} = 12$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1| + |-2|, |-3| + |4|, |5| + |6|\} = \max\{3, 7, 11\} = 11$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{91}$$

مثال ۲: فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  در این صورت،

$$\|A\|_2 = ?$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 34 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه  $A^T A$  عبارتند از :

$$\lambda_1 = 38.9743, \lambda_2 = 0.0257$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}} = 6.2429$$



# نرم های ماتریسی

چند خاصیت از نرم ماتریسی وابسته

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ \& } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^{l \times m} \text{ \& } B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \|AB\|_{l,n} \leq \|A\|_{l,m} \|B\|_{m,n}$$

$$\forall A, B \quad \|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \quad p=1, 2, \infty$$

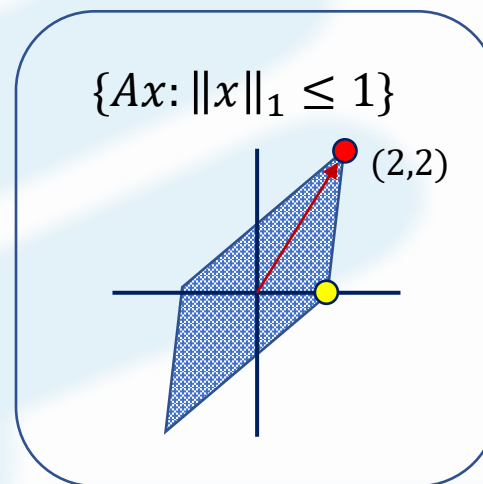
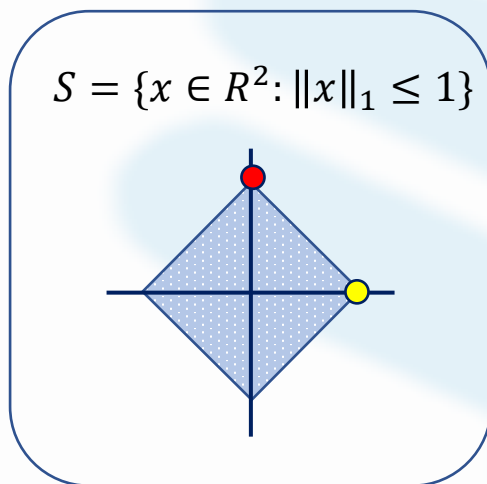
$$\forall A, B \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$



# نرم های ماتریسی

مثال: فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\|_1 \leq 1\} \rightarrow \{Ax: x \in S\}$$



بردارى واحدی که به ازای آن،  $\|Ax\|_1$  بیشترین مقدار را به خود اختصاص می دهد، بردار  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  است. ضریب تقویت برابر  $\|A\|_1 = 4$  است.

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$



# نرم های ماتریسی

تمرین:

۱- اگر  $I$  ماتریس واحد  $n$  در  $n$  باشد

$$\|I\|_1 = ?$$

$$\|I\|_2 = ?$$

$$\|I\|_\infty = ?$$

$$\|I\|_F = ?$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\|I\|_1 = \max\{|1| + |0| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |0| + |1|\} = \max\{1, 1, 1\} = 1$$

$$\|I\|_\infty = \max\{|1| + |0| + |0|, |0| + |1| + |0|, |0| + |0| + |1|\} = \max\{1, 1, 1\} = 1$$

$$\|I\|_2 = \sqrt{\text{eigenvalue of } I^T I} = \sqrt{\text{eigenvalue of } I} = 1$$

$$\|I\|_F = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$



# نرم های ماتریسی

## تعریف هم ارزی نرم های ماتریسی

دو نرم ماتریسی  $\|\cdot\|_\alpha$  و  $\|\cdot\|_\beta$  را هم ارز گوئیم اگر ثابت های  $a$  و  $b$  حقیقی وجود داشته باشند به طوری که

$$a\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta \leq b\|\cdot\|_\alpha$$

**گزاره:** به ازای هر ماتریس دلخواه  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، نرم های ماتریسی  $\|\cdot\|_1$  و  $\|\cdot\|_\infty$  و  $\|\cdot\|_2$  در روابط هم ارزی زیر صدق می کنند:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \quad (\text{ب})$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \quad (\text{ج})$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty} \quad (\text{د})$$



# نرم های ماتریسی

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}$$

اثبات (الف)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \quad (1)$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty} \quad (2)$$

اثبات الف- (1)

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \quad ?$$

بنابر تعریف داریم:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \quad (*)$$

همچنین بنابر هم ارزی نرم های برداری داریم :

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \quad (**)$$

و

$$\|Ax\|_{\infty} \leq \|Ax\|_2 \quad (***)$$

$$(**) \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\|x\|_2} \quad (****)$$

$$(***) \& (****) \Rightarrow \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{\sqrt{n} \|Ax\|_2}{\|x\|_2} \Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{n} \|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2$$



# نرم های ماتریسی

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}$$

اثبات (الف)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \quad (1)$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty} \quad (2)$$

اثبات الف- (2)

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty} \quad ?$$

بنابر تعریف داریم:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (*)$$

همچنین بنابر هم ارزی نرم های برداری داریم :

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{m} \|Ax\|_{\infty} \quad (**)$$

و

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \quad (***)$$

$$(***) \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_2} \leq \frac{1}{\|x\|_{\infty}} \quad (****)$$

$$(**) \& (****) \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\sqrt{m} \|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \Rightarrow \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\sqrt{m} \|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty} \quad \blacksquare$$



# نرم های ماتریسی

تمرین:

۱- روابط هم ارزی نرم های برداری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$



**همگرایی دنباله ها**

University of Mazandaran



# همگرایی دنباله‌ها

همگرایی دنباله‌ای از بردارها:

دنباله بردارهای  $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots$  از  $\mathbb{R}^n$  به بردار  $\mathbf{v}$  همگراست اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i^{(k)} = \mathbf{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

همگرایی دنباله‌ای از ماتریس‌ها:

دنباله ماتریس‌های  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$  از  $\mathbb{R}^{m \times n}$  به ماتریس  $A$  همگراست اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \& \quad j = 1, 2, \dots, n$$



# همگرایی دنباله‌ها

**قضیه** دنباله بردارهای  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$  از  $\mathbb{R}^n$  به بردار  $v$  همگراست اگر و فقط اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{(k)} - v\| = 0$$

**قضیه** دنباله ماتریس‌های  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$  از  $\mathbb{R}^{m \times n}$  به ماتریس  $A$  همگراست اگر و فقط اگر

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$$

**نکته:** اگر دنباله  $\{A^{(k)}\}$  به ماتریس  $A$  همگرا باشد می‌گوییم:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$$

**مثال:** فرض کنید  $v^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix}$  آنگاه دنباله  $[v^{(k)}]_{k=1}^{\infty}$  به بردار  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  همگراست.

**مثال:** فرض کنید  $A^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 2 + \frac{1}{k} \end{bmatrix}$  آنگاه دنباله  $[A^{(k)}]_{k=1}^{\infty}$  به ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  همگراست.



# همگرایی دنباله‌ها

**قضیه** دنباله  $A^1, A^2, \dots$  از توانهای ماتریس  $A$  به ماتریس صفر همگراست اگر و فقط اگر هر مقدار ویژه  $\lambda_i$  از ماتریس  $A$  در نامساوی  $|\lambda_i| < 1$  صدق کند (مساوی یک نباید باشد)

**اثبات:** به ازای هر ماتریس مربعی  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، ماتریس معکوس پذیر  $T$  وجود دارد بطوریکه:

$$T^{-1}AT := J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

که در آن،

$$J_i = \begin{bmatrix} J_i & 1 & & \\ & J_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & J_i \end{bmatrix}$$

با محاسبه‌ی جبری ساده می‌توان نشان داد که،

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda_i^{k-n+2} \\ & & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} J_i^k = \mathbf{0} \iff |\lambda_i| < 1$$

$$\implies \lim_{K \rightarrow \infty} A^K = \lim_{K \rightarrow \infty} (TJT^{-1})(TJT^{-1}) \dots (TJT^{-1}) = \lim_{K \rightarrow \infty} T J^K T^{-1} = \mathbf{0}$$

$$\iff |\lambda_i| < 1 \text{ for each } i \quad \blacksquare$$



**ماتریس همگرا**

University of Mazandaran



# ماتریس همگرا

**تعریف ماتریس همگرا:** گوییم ماتریس  $A$  همگراست اگر دنباله توانی  $\{A^k\}$  به ماتریس صفر میل کند

$$\lim_{K \rightarrow \infty} A^k = 0$$

**قضیه:** فرض کنید  $\lambda$  یک مقدار ویژه از ماتریس  $A$  باشد آنگاه داریم  $|\lambda| \leq \|A\|$ ، که در آن  $\|\cdot\|$  یک نرم ماتریسی وابسته است.

**اثبات:** فرض کنید  $x$  بردار ویژه غیر صفر متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  از ماتریس  $A$  باشد. در این صورت،

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (*)$$

از طرفی طبق خواص نرم ماتریسی وابسته داریم:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (**)$$

از  $(*)$  و  $(**)$  نتیجه می شود که:

$$|\lambda| \|x\| \leq \|A\| \|x\|$$

لذا، با توجه به غیر صفر بودن  $x$  داریم:

$$|\lambda| \leq \|A\|$$



# ماتریس همگرا

تعریف شعاع طیفی ماتریس  $A$ :

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

نتیجه:

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

نتیجه: ماتریس  $A$  همگراست اگر  $\|A\| < 1$  (  $\|\cdot\|$  یک نرم ماتریسی وابسته است )



**همگرایی سری توانی**

University of Mazandaran



# همگرایی سری توانی

**قضیه:** سری توانی  $I+A+A^2+\dots$  به ماتریس  $(I-A)^{-1}$  همگرا است، اگر ماتریس  $A$  همگرا باشد.

**اثبات:** ابتدا ثابت می کنیم  $(I-A)^{-1}$  وجود دارد

با توجه به تعریف ماتریس همگرا، از این که  $A$  همگراست پس  $\lim_{K \rightarrow \infty} A^K = 0$

لذا، طبق قضیه، از این که دنباله  $A^1, A^2, \dots$  از توان های ماتریس  $A$  به ماتریس صفر همگراست، نتیجه می شود که هر مقدار ویژه  $\lambda_i$  از ماتریس  $A$  در نامساوی  $|\lambda_i| < 1$  صدق می کند.

همچنین، از جبر خطی می دانیم اگر  $\lambda_i$  یک مقدار ویژه ماتریس  $A$  باشد،  $1-\lambda_i$  یک مقدار ویژه از ماتریس  $I-A$  است.

از طرفی  $|\lambda_i| < 1$  نتیجه می دهد که  $\lambda_i < 1$ ، بنابراین  $1-\lambda_i \neq 0$ . این بدان معنی است که همه مقدار ویژه ماتریس  $I-A$  مخالف صفرند. در نتیجه  $(I-A)^{-1}$  وجود دارد.

**اثبات همگرایی:**

$$(I-A)(I+A+A^2+\dots+A^K) = I-A^{K+1}$$

$(I-A)$  ماتریسی معکوس پذیر است. بنابراین

$$\begin{aligned} I+A+A^2+\dots+A^K &= (I-A)^{-1}(I-A^{K+1}) \\ &= (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A^{K+1} \end{aligned}$$

اکنون با حدگیری از طرفین رابطه فوق داریم :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} I+A+\dots+A^K = \lim_{K \rightarrow \infty} (I-A)^{-1} - \lim_{K \rightarrow \infty} (I-A)^{-1}A^{K+1}$$

از همگرا بودن  $A$  نتیجه می شود که  $\lim_{K \rightarrow \infty} (I-A)^{-1}A^{K+1} = 0$

در نتیجه

$$I+A+A^2 \dots = (I-A)^{-1} \blacksquare$$



# نرم های وابسته و معکوس ها



# نرم های وابسته و معکوس ها

قضیه: اگر  $\|E\| < 1$  آن گاه  $(I - E)^{-1}$  وجود دارد و

$$\|(I - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -10^{-1} & 10^{-3} \\ 10^{-2} & 10^{-1} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \|E\|_1 = 0.11 < 1$$

$$\longrightarrow \quad I - E = \begin{bmatrix} 1 + 10^{-1} & -10^{-3} \\ -10^{-2} & 1 - 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(I - E)^{-1} = \frac{1}{|I - E|} \begin{bmatrix} 1 - 10^{-1} & 10^{-3} \\ 10^{-2} & 1 + 10^{-1} \end{bmatrix}$$



# نرم های وابسته و معکوس ها

**قضیه:** اگر  $\|E\| < 1$  آن گاه  $(I - E)^{-1}$  وجود دارد و

$$\|(I - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}$$

اثبات وجود معکوس: ابتدا ثابت می کنیم اگر  $\|E\| < 1$ ، آن گاه  $(I - E)^{-1}$  وجود دارد

فرض کنید  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  مقادیر ویژه ماتریس  $E$  باشند. از اینکه  $\|E\| < 1$  داریم  $|\lambda_i| < 1$ . بنابراین، مقادیر ویژه ماتریس  $I - E$ ، یعنی  $(1 - \lambda_1), (1 - \lambda_2), \dots, (1 - \lambda_n)$  مخالف صفرند. بنابراین ماتریس  $I - E$  معکوس پذیر است و  $(I - E)^{-1}$  وجود دارد.

$$\text{اثبات نامساوی} \quad \|(I - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}$$

از قضیه قبل داریم :

$$(I - E)^{-1} = I + E + E^2 + \dots = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^K E^i$$

اکنون با نرم گیری از طرفین رابطه فوق داریم :

$$\|(I - E)^{-1}\| = \left\| \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^K E^i \right\| \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^K \|E^i\|$$

می دانیم  $\|E^i\| \leq \|E\|^i$  بنابراین

$$\|(I - E)^{-1}\| \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^K \|E\|^i \leq \frac{1}{1 - \|E\|} \quad \blacksquare$$



## نرم های وابسته و معکوس ها

**قضیه:** اگر  $\|E\| < 1$  آن گاه

$$\|(I - E)^{-1} - I^{-1}\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|E\|}$$

اثبات: ([1])

**قضیه:** فرض کنید  $A$  ماتریس نامنفرد باشد و  $\|A^{-1}E\| < 1$  آنگاه  $(A - E)^{-1}$  وجود دارد و

$$\frac{\|A^{-1} - (A - E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|}$$

اثبات: ([1])



# نرم وابسته و ماتریس متعامد



# نرم وابسته و ماتریس متعامد

**قضیه:** فرض کنید  $O$  یک ماتریس متعامد باشد، آن گاه

$$\|O\|_2 = 1$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\|O\|_2 &= \sqrt{O^T O} \text{ مقدار ویژه ماکزیمم از ماتریس } = \sqrt{\rho(O^T O)} \\ &= \sqrt{\rho(I)} = 1\end{aligned}$$

**قضیه:** فرض کنید  $O$  یک ماتریس متعامد باشد، آن گاه

$$\|AO\|_2 = \|A\|_2$$

اثبات:

$$\|AO\|_2 = \sqrt{\rho(O^T A^T A O)} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \|A\|_2$$

**قضیه:** فرض کنید  $O$  یک ماتریس متعامد باشد، آن گاه

$$\|AO\|_F = \|A\|_F$$

اثبات:

$$\|AO\|_F = \sqrt{\text{trace}(O^T A^T A O)} = \sqrt{\text{trace}(A^T A)} = \|A\|_F$$



## مراجع

1. Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 1995.
2. Gilbert Strang, Fourth Edition, *Linear Algebra and Its Applications*, 2005
3. G.H. Golub, and C.F. Van Loan, **Matrix Computations**, 4rd Edition, Johns Hopkins University Press, 2013.
4. J. Demmel, **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
5. L.N. Trefthen, and D.D. Bau, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
6. <https://www.slideserve.com/brigit/vector-norms>

