

محاسبات علمی

روش های تکراری برای حل

دستگاه $Ax=b$

Dr. Ali Valinejad

valinejad.ir

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

فهرست مطالب

❖ دستگاه معادلات خطی

❖ روش‌های تکراری

○ روش ژاکوبی

○ روش گاوس-سایدل

○ روش فوق تخفیف متوالی (SOR)

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

شکل ماتریسی:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_b$$

$$Ax = b$$

روش‌های حل دستگاه معادلات خطی

❖ روش‌های مستقیم

روش‌های مستقیم طی یک تعداد گام متناهی جواب دستگاه معادلات خطی را محاسبه می‌کنند.

- محاسبه معکوس ماتریس ضرایب
- روش کرامر
- روش حذفی گاوس
- روش تجزیه LU

❖ روش‌های غیر مستقیم (تکراری)

روش‌های غیر مستقیم طی یک تعداد گام نامتناهی تقریبی از جواب دستگاه معادلات خطی را محاسبه می‌کنند.

- روش ژاکوبی
- روش گاوس-سایدل
- روش فوق تخفیف متوالی

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

- ❖ روش‌های تکراری طی یک تعداد گام نامتناهی تقریبی از جواب دستگاه معادلات خطی را محاسبه می‌کنند.
- ❖ این روش‌ها بر مبنای تکرار هستند.
- ❖ زمان اتمام محاسبات در روش‌های تکراری، برقراری یک شرط توقف است.
- ❖ روش‌های تکراری عملکرد موثری در حل دستگاه‌های بزرگ مقیاس دارند.
- ❖ روش‌های تکراری عملکرد موثری در حل دستگاه‌هایی با ماتریس ضرایب تُنک دارند.

ایده اصلی روش‌های تکراری:

برای دستگاه خطی مفروض $Ax = b$ (با ماتریس ضرایب مربعی معکوس‌پذیر)، ماتریس B و بردار c را طوری پیدا کنید که
۱- ماتریس $I - B$ معکوس‌پذیر باشد.

۲- جواب منحصر بفرد $\hat{x}$ از دستگاه $Ax = b$ همان جواب منحصر بفرد $\hat{u}$ از دستگاه $u = Bu + c$ باشد.

سپس دنباله تقریب‌های $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ را با استفاده از رابطه زیر تولید کنید:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$$

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

الگوریتم کلی روش‌های تکراری:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.
گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ دنباله تقریب‌های $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ را با استفاده از رابطه زیر تولید کنید:
$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$$

شرط توقف روش‌های تکراری :

❖ در روش‌های تکراری در صورت مشاهده عدم ایجاد تغییر در بردار جواب، الگوریتم به بردار جواب تقریبی همگرا شده است و باید الگوریتم را متوقف کرد.

❖ در صورتی که خطای مطلق یا نسبی بردار جواب از یک مقدار از پیش تعیین شده ϵ کمتر شود، الگوریتم همگرا شده است.

❖ بعضی از معیارهای توقف عبارتند از:

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \epsilon \qquad \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \epsilon$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| < \epsilon \qquad \frac{\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \epsilon$$

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش ژاکوبی)

ایده اصلی روش ژاکوبی:

در صورتی که هیچ کدام از مولفه‌های قطری ماتریس ضرایب صفر نباشند، در روش ژاکوبی به صورت زیر عمل می‌شود:
تولید کنید:

- حل معادله اول برای محاسبه x_1
- حل معادله دوم برای محاسبه x_2
- ...
- حل معادله n ام برای محاسبه x_n

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\&\vdots \\x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}\end{aligned}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش ژاکوبی)

الگوریتم روش ژاکوبی:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شرط توقف الگوریتم روش ژاکوبی:

❖ بعضی از معیارهای توقف عبارتند از:

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \epsilon \quad \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \epsilon$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < \epsilon \quad \frac{\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2}{\|x^{(k+1)}\|_2} < \epsilon$$

- می‌توان یک کران بالا برای تعداد تکرارهای الگوریتم در نظر گرفت.

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش ژاکوبی)

مثال:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -3$$



$$x_1 = +0.5x_2 - 0.5x_3 - 0.5$$

$$x_2 = -0.5x_1 + 0.5x_3 + 3.0$$

$$x_3 = -0.5x_1 + 0.5x_2 - 1.5$$

$$x_1^{(k)} = +0.5x_2^{(k-1)} - 0.5x_3^{(k-1)} - 0.5$$

$$x_2^{(k)} = -0.5x_1^{(k-1)} + 0.5x_3^{(k-1)} + 3.0$$

$$x_3^{(k)} = -0.5x_1^{(k-1)} + 0.5x_2^{(k-1)} - 1.5$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < 0.001$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3.0 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	-0.5000	3.0000	-1.5000
2	1.7500	2.5000	0.2500
3	0.6250	2.2500	-1.1250
4	1.1875	2.1250	-0.6875
5	0.9063	2.0625	-1.0313
6	1.0469	2.0313	-0.9219
7	0.9766	2.0156	-1.0078
8	1.0117	2.0078	-0.9805
9	0.9941	2.0039	-1.0020
10	1.0029	2.0020	-0.9951
11	0.9985	2.0010	-1.0005
12	1.0007	2.0005	-0.9988
13	0.9996	2.0002	-1.0001
14	1.0002	2.0001	-0.9997

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش ژاکوبی)

- ❖ ممکن است روش ژاکوبی برای یک دستگاه معادلات خطی **واگرا** شود.
- ❖ ممکن است همگرایی روش ژاکوبی برای یک دستگاه معادلات خطی **نشد** باشد.
- ❖ در صورتی که ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ **اکیداً غالب قطری** باشد، یعنی به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ نامساوی $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ برقرار باشد، روش ژاکوبی به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ به جواب یکتای $Ax = b$ همگرا می‌شود.
- ❖ در صورت نیاز می‌توان با جابجایی سطرهای ماتریس ضرایب، آن را به یک ماتریس غالب قطری تبدیل نمود.

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

(روش گاوس-سایدل)

ایده اصلی روش گاوس-سایدل:

در صورتی که هیچ کدام از مولفه‌های ماتریس ضرایب صفر نباشند، در روش گاوس-سایدل به صورت زیر عمل می‌شود:
تولید کنید:

- حل معادله اول برای محاسبه x_1
- حل معادله دوم برای محاسبه x_2
- ...
- حل معادله n ام برای محاسبه x_n

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش گاوس-سایدل)

الگوریتم روش گاوس-سایدل:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شرط توقف الگوریتم روش گاوس-سایدل:

❖ بعضی از معیارهای توقف عبارتند از:

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \epsilon \qquad \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \epsilon$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < \epsilon \qquad \frac{\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2}{\|x^{(k+1)}\|_2} < \epsilon$$

- می‌توان یک کران بالا برای تعداد تکرارهای الگوریتم در نظر گرفت.

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش گاوس-سایدل)

مثال:

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 & & x_1 = +0.5x_2 - 0.5x_3 - 0.5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & \rightarrow & x_2 = -0.5x_1 + 0.5x_3 + 3.0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 & & x_3 = -0.5x_1 + 0.5x_2 - 1.5 \end{array}$$

$$x_1^{(k)} = +0.5x_2^{(k-1)} - 0.5x_3^{(k-1)} - 0.5$$

$$x_2^{(k)} = -0.5x_1^{(k)} + 0.5x_3^{(k-1)} + 3.0$$

$$x_3^{(k)} = -0.5x_1^{(k)} + 0.5x_2^{(k)} - 1.5$$

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < 0.001$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	-0.5000	3.2500	0.3750
2	0.9375	2.7188	-0.6094
3	1.1641	2.1133	-1.0254
4	1.0693	1.9526	-1.0583
5	1.0055	1.9681	-1.0187
6	0.9934	1.9939	-0.9997
7	0.9968	2.0017	-0.9976
8	0.9996	2.0014	-0.9991
9	1.0003	2.0003	-1.0000
10	1.0001	1.9999	-1.0001

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$ (روش گاوس-سایدل)

- ❖ اگر روش ژاکوبی همگرا (واگرا) باشد، روش گاوس-سایدل نیز همگرا (واگرا) می‌شود.
- ❖ در صورت همگرایی روش‌های ژاکوبی و گاوس-سایدل، همگرایی روش گاوس-سایدل سریعتر از همگرایی روش ژاکوبی است.
- ❖ در صورتی که ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ اکیداً غالب قطری باشد، یعنی به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ نامساوی $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ برقرار باشد، روش گاوس-سایدل به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ به جواب یکتای $Ax = b$ همگرا می‌شود.
- ❖ در صورت نیاز می‌توان با جابجایی سطرهای ماتریس ضرایب، آن را به یک ماتریس غالب قطری تبدیل نمود.
- ❖ در صورتی که ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ معین مثبت و متقارن باشد، روش گاوس-سایدل به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}$ به جواب دستگاه همگرا می‌شود.

با وجود روش گاوس-سایدل، مزیت روش ژاکوبی چیست؟

تعریف: گویم ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ معین مثبت است هرگاه، به ازای هر بردار مخالف صفر x ، نامساوی $x^T A x > 0$ برقرار باشد،

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

(روش فوق تخفیف متوالی (SOR))

ایده اصلی روش SOR:

در صورتی که هیچ کدام از مولفه‌های ماتریس ضرایب صفر نباشند، در روش SOR به صورت زیر عمل می‌شود:
تولید کنید:

- حل معادله اول برای محاسبه x_1
- حل معادله دوم برای محاسبه x_2
- ...
- حل معادله n ام برای محاسبه x_n

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n$$

$\vdots$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

(روش فوق تخفیف متوالی (SOR))

الگوریتم روش SOR:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شرط توقف الگوریتم روش SOR:

❖ بعضی از معیارهای توقف عبارتند از:

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \epsilon$$

$$\max_{i=1,2,\dots,n} \frac{|x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \epsilon$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < \epsilon$$

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2}{\|x^{(k+1)}\|_2} < \epsilon$$

- می‌توان یک کران بالا برای تعداد تکرارهای الگوریتم در نظر گرفت.

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

(روش فوق تخفیف متوالی (SOR))

مثال:

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 7$$

$$\omega = 1.2$$



$$x_1^{(k)} = -0.2x_1^{(k-1)} - 0.24x_2^{(k-1)} - 0.24x_3^{(k-1)} + 1.68$$

$$x_2^{(k)} = 0.048x_1^{(k-1)} - 0.1424x_2^{(k-1)} - 0.1824x_3^{(k-1)} + 1.2768$$

$$x_3^{(k)} = 0.0365x_1^{(k-1)} + 0.0918 + x_2^{(k-1)} - 0.0986x_3^{(k-1)} + 0.9704$$

$$x^{(0)} = (0,0,0)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

$$\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|_2 < 0.001$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.6800	1.2768	0.9704
2	0.8047	0.9986	1.0531
3	1.0266	0.9811	0.9875
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

روش‌های غیر مستقیم (تکراری) برای حل دستگاه مربعی $Ax = b$

(روش فوق تخفیف متوالی (SOR))

قضیه (Kahan): اگر $\omega \notin (1, 2)$ ، روش SOR نمی‌تواند برای یک حدس اولیه دلخواه $x^{(0)}$ به جواب یکتای $Ax = b$ همگرا شود.

قضیه (Ostrowski-Reich): اگر ماتریس ضرایب دستگاه $Ax = b$ ، معین مثبت و متقارن باشد و $\omega \in (1, 2)$ ، آن گاه روش SOR برای حدس اولیه دلخواه $x^{(0)}$ به جواب یکتای $Ax = b$ همگرا می‌شود.

تعریف: گوییم ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ معین مثبت است هرگاه، به ازای هر بردار مخالف صفر x ، نامساوی $x^T A x > 0$ برقرار باشد،

شکل ماتریسی روش‌های تکراری

▪ Jacobi method

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k-1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\x_3^{(k)} &= -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k-1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k-1)} + \frac{b_3}{a_{33}}\end{aligned}$$

▪ Gauss-seidel method

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k-1)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\x_2^{(k)} &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k-1)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\x_3^{(k)} &= -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k)} - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k)} + \frac{b_3}{a_{33}}\end{aligned}$$

▪ SOR method

$$\begin{aligned}x_1^{(new)} &= (1 - \omega)x_1^{(old)} + \frac{\omega}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(old)} - a_{13}x_3^{(old)}) \\x_2^{(new)} &= (1 - \omega)x_2^{(old)} + \frac{\omega}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(new)} - a_{23}x_3^{(old)}) \\x_3^{(new)} &= (1 - \omega)x_3^{(old)} + \frac{\omega}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(new)} - a_{32}x_2^{(new)})\end{aligned}$$

شکل ماتریسی روش‌های تکراری

ایده اصلی روش‌های تکراری:

برای دستگاه خطی مفروض $Ax = b$ (با ماتریس ضرایب مربعی معکوس‌پذیر)، ماتریس B و بردار c را طوری پیدا کنید که
۱- ماتریس $I - B$ معکوس‌پذیر باشد.

۲- جواب منحصر بفرد $\hat{x}$ از دستگاه $Ax = b$ همان جواب منحصر بفرد $\hat{u}$ از دستگاه $u = Bu + c$ باشد.

سپس دنباله تقریب‌های $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ را با استفاده از رابطه زیر تولید کنید:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$$

$B = ?$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = D + L + U$$

شکل ماتریسی روش‌های تکراری

(ادامه)

الگوریتم روش ژاکوبی:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$
گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شکل ماتریسی روش ژاکوبی:

$$x^{(k)} = B_j x^{(k-1)} + c_j$$

s.t

$$B_j = -D^{-1}(L + U) = (I - D^{-1}A)$$
$$c_j = D^{-1}b$$

Jacobi Iteration Matrix

Jacobi Vector

شکل ماتریسی روش‌های تکراری

(ادامه)

الگوریتم روش گاوس - سایدل:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شکل ماتریسی روش گاوس - سایدل:

$$x^{(k)} = B_{gs} x^{(k-1)} + c_j$$

s.t

$$B_{gs} = -(L + D)^{-1} U$$

$$c_{gs} = (L + D)^{-1} b$$

Gauss-Seidel Iteration Matrix

Gauss-Seidel Vector

شکل ماتریسی روش های تکراری

(ادامه)

الگوریتم روش SOR:

گام ۰: تعیین یک حدس اولیه برای جواب دستگاه، $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

گام تکرار: برای $k = 1, 2, \dots$ عملیات زیر را تکرار کنید

$$x_i^{(k)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شکل ماتریسی روش SOR:

$$x^{(k)} = B_{sor} x^{(k-1)} + c_j$$

s.t

$$B_{sor} = -(D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega U]$$

$$c_{sor} = \omega(D + \omega L)^{-1} b$$

SOR Iteration Matrix

SOR Vector

همگرایی روش‌های تکراری

تعریف (consistently ordered): ماتریس $A = L + D + U$ به طور سازگار مرتب نامند اگر مقادیر ویژه ماتریس

$$C(\mu) = -D^{-1} \left(\frac{1}{\mu} L + \mu U \right), \quad \mu \neq 0$$

وابسته به μ نباشند.

تعریف (2-cyclic): ماتریس A را ۲-دوری گویند اگر ماتریس جایگشت P وجود داشته باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

که در آن، ماتریس‌های A_{11} و A_{22} قطری هستند.

قضیه (Young): فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس ۲-دوری با عناصر قطری غیر صفر باشد. آن گاه

$$\rho(B_{gs}) = (\rho(B_j))^2$$

علاوه بر این، اگر مقادیر ویژه ماتریس حقیقی باشند و $\rho(B_j) < 1$ ، آن گاه مقدار بهینه در روش **SOR** برابر است با

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(B_j))^2}}$$

و $\rho(B_{sor}) = \omega_{opt} - 1$.

گزاره: برای ماتریس‌های ۲-دوری به طور سازگار مرتب، اگر روش ژاکوبی همگرا باشد، روش گاوس-سایدل نیز همگرا خواهد شد، و سرعت همگرایی روش گاوس-سایدل دو برابر روش ژاکوبی است.

همگرایی و نرخ همگرایی روش‌های تکراری

(ادامه)

روش تکراری

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c, \quad k = 1, 2, \dots,$$

را برای محاسبه تقریبی از جواب دستگاه $Ax = b$ در نظر بگیرید:

لم: اگر شعاع طیفی ماتریس B در نامساوی $\rho(B) < 1$ صدق کند که در آن $\rho(B)$ شعاع طیفی ماتریس B است، آن گاه $(I - B)^{-1}$ وجود دارد و سری توانی $I + B + B^2 + \dots$ به ماتریس $(I - B)^{-1}$ همگرا می‌شود.

قضیه: برای هر حدس اولیه دلخواه $x^{(0)}$ دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تعریف شده توسط رابطه تکراری $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$ به جواب دستگاه $Ax = b$ همگرا می‌شود اگر و فقط اگر $\rho(B) < 1$.

قضیه: فرض کنید $c \in \mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه باشد و برای هر نرم ماتریسی طبیعی نامساوی $\|B\| < 1$ برقرار باشد، آن گاه دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تعریف شده توسط رابطه تکراری $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$ برای هر بردار تقریب اولیه دلخواه $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ همگرا می‌شود و کران خطای زیر برقرار است:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

و در نتیجه

$$\|x - x^{(k)}\| \approx \rho(B)^k \|x^{(0)} - x\|$$

قضیه: فرض کنید $c \in \mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه باشد و برای هر نرم ماتریسی طبیعی نامساوی $\|B\| < 1$ برقرار باشد، آن گاه دنباله $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تعریف شده توسط رابطه تکراری $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$ برای هر بردار تقریب اولیه دلخواه $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ همگرا می‌شود و کران خطای زیر برقرار است:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

همگرایی و نرخ همگرایی روش‌های تکراری

(ادامه)

قضیه (Stein-Rosenberg): اگر به ازای هر $i, j \neq i$, $a_{ij} \leq 0$ و به ازای هر $i = 1, 2, \dots$, $a_{ii} \geq 0$, آن گاه فقط و فقط یکی از عبارات زیر برقرار است:

i. $0 \leq \rho(B_{gs}) < \rho(B_j) < 1$;

ii. $1 < \rho(B_j) < \rho(B_{gs})$;

iii. $\rho(B_{gs}) = \rho(B_j) = 0$;

iv. $\rho(B_{gs}) = \rho(B_j) = 1$.

مراجع

1. Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 1995.
2. <https://slideplayer.com/slide/13445300/>
3. <https://math.unice.fr/~frapetti/CorsoF/cours3.pdf>
4. <https://www.cis.upenn.edu/~cis515/cis515-12-sl5.pdf>